

Beszámoló a 2024. évi Eötvös-versenyről



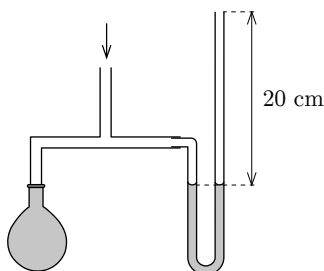
Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2024. évi Eötvös-versenye október 11-én délután 3 órai kezdettel tíz magyarországi helyszínen¹ került megrendezésre. Ezért külön köszönettel tartozunk mindazoknak, akik ebben szervezéssel, felügyelettel a segítségünkre voltak. A versenyen a három feladat megoldására 300 perc áll rendelkezésre, bármely írott vagy nyomtatott segédeszköz használható, de (nem programozható) zsebszámológépen kívül minden elektronikus eszköz használata tilos. Az Eötvös-versenyen azok vehetnek részt, akik vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny évében fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Összesen 54 versenyző adott be dolgozatot, 24 egyetemista és 30 középiskolás.

Ismertetjük a feladatokat és azok megoldását.



1. Egy léggömb elasztikus viselkedése a fal rugalmas energiája segítségével jellemezhető. Ha a jó közelítéssel mindvégig gömb alakú lufi mérete a feszítetlen méret λ -szorosára változik, akkor a léggömb rugalmas energiája a $2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3$ kifejezéssel egyenes arányban növekszik egészen addig, míg végül $\lambda \approx 3$ érték körül a lufi kidurran.

A kezdetben ernyedt állapotú léggömböt egy kompresszorhoz csatlakoztatott T-alakú elosztó egyik kivezetésére kötjük, a másik kivezetésre pedig egy vékony üvegcsőből készült vizes manométert rögzítünk az 1. ábrán látható módon. A víz a cső 20 cm hosszú szakaszát foglalja el. A kompresszor elindítása után azt tapasztaljuk, hogy a folyadékszintek az eredeti helyzetükhöz képest lassan 5 cm-rel mozdulnak el, mialatt a léggömb átmérője 5%-kal növekszik. Mi fog történni ezután?



1. ábra

(Vigh Máté)

¹Részletek a verseny honlapján: <http://eik.bme.hu/~vanko/fizika/eotvos.htm>

Megoldás. A lufi rugalmas energiája egy alkalmas E_0 konstans bevezetésével így írható:

$$E = E_0 (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3).$$

Meggyőződhetünk róla, hogy nyújtatlan állapotban (azaz $\lambda = 1$ esetén) a rugalmas energia a várakozásnak megfelelően zérus, $\lambda > 1$ értékekre pedig $E(\lambda)$ monoton növekvő függvény. Vajon hogyan határozható meg ebből az összefüggésből a lufiban uralkodó p túlnyomás értéke? Alkalmazzuk a virtuális munka elvét: ha a léggömb térfogatát kis ΔV értékkel megnöveljük, a bezárt és a külső levegő együttes munkavégzése éppen egyenlő a rugalmas energia növekedésével:

$$p\Delta V = \Delta E.$$

A lufi pillanatnyi térfogata a kezdeti V_0 térfogattal $V = V_0\lambda^3$ módon fejezhető ki. Ennek kicsiny megváltozása a magasabb rendű tagok elhanyagolásával a következőképpen közelíthető:

$$\Delta V \approx 3V_0\lambda^2\Delta\lambda.$$

Ehhez hasonlóan a rugalmas energia kifejezése is sorba fejthető:

$$\Delta E \approx E_0 (4\lambda - 4\lambda^{-5}) \Delta\lambda.$$

Az eddigiek felhasználásával a túlnyomás kiszámítható:

$$p = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \frac{4E_0 (\lambda - \lambda^{-5}) \Delta\lambda}{3V_0\lambda^2\Delta\lambda} = p_0 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7} \right),$$

ahol a rövidség kedvéért bevezettük a $p_0 = \frac{4E_0}{3V_0}$ jelölést (ami nem azonos a külső légnyomással).

A feladat szövegéből tudjuk, hogy $p(\lambda = 1,05) = 10$ vízcm, hiszen ha a vízszintek 5 cm-rel mozdulnak el, akkor a folyadékszintek különbsége 10 cm lesz. Ebből:

$$p_0 = \frac{10 \text{ vízcm}}{1,05^{-1} - 1,05^{-7}} = 41,4 \text{ vízcm}.$$

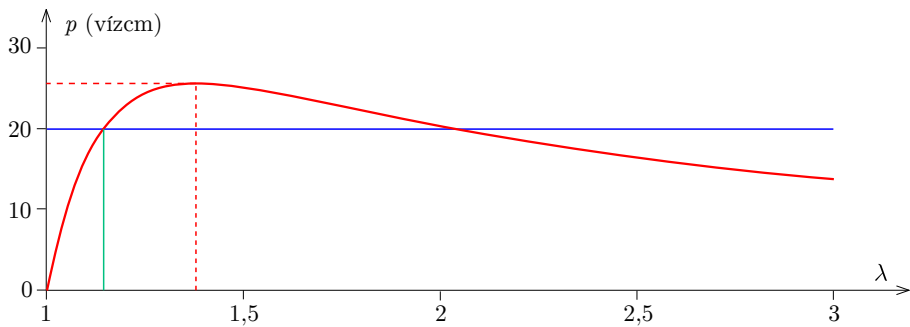
Érdemes kiszámítani a nyomás értékét a következő két speciális esetben:

$\lambda = 1$ esetén (ernyedtt állapotban) p valóban nulla, ahogy várjuk.

$\lambda = 3$ esetén (azaz a kidurranás határán) $p = 13,8$ vízcm.

Ekkora túlnyomást a manométerben lévő 20 cm hosszú vízoszlop ki tud fejteni. Ebből azt a *hibás* következtetést vonhatjuk le, hogy a lufi felfújódása egészen addig folytatódik, míg a vízszintek elmozdulása $\frac{13,8}{2} = 6,9$ cm-re nő, majd ekkor a lufi kidurran.

Vajon hol a hiba ebben a gondolatmenetben? Ehhez vizsgáljuk meg részletebben a $p(\lambda)$ függvényt (2. ábra)! Numerikus értékek behelyettesítésével észrevehetjük, hogy a nyomásnak $\lambda = 1$ és $\lambda = 3$ között maximuma van. (A jelenséget tapasztalatból is ismerjük: egy lufit kezdetben nehezebb, majd egy bizonyos méret felett könnyebb felfújni.)



2. ábra

A maximum pontos helye deriválással határozható meg:

$$\frac{dp}{d\lambda} = p_0 (-\lambda^{-2} + 7\lambda^{-8}).$$

Ez a derivált zérus, ha

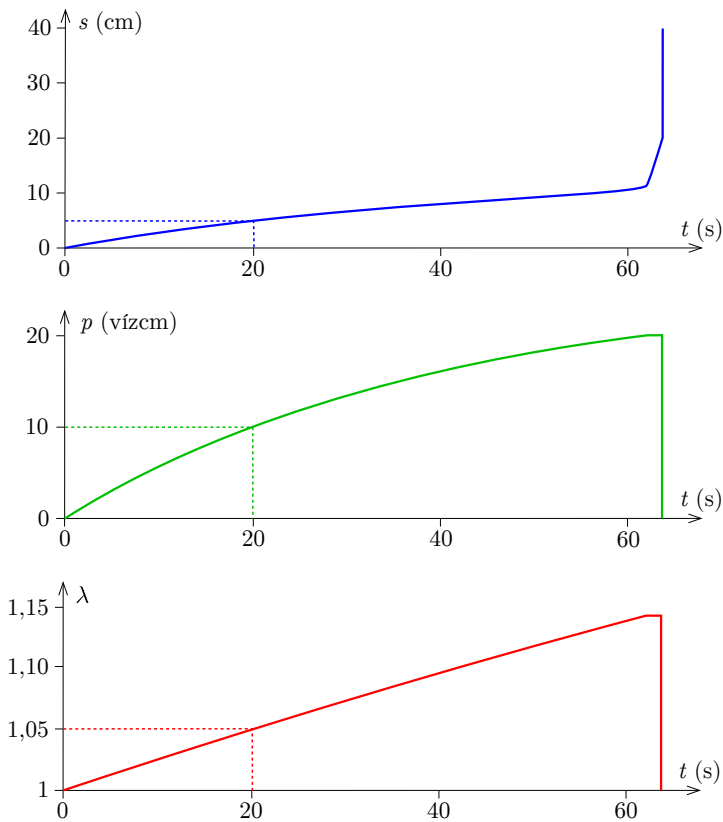
$$\lambda = \lambda^* = \sqrt[6]{7} = 1,38, \quad \text{ahol} \quad p(\lambda^*) = 25,7 \text{ vízcm.}$$

Mi fog tehát történni? Ahogy az a 2. ábráról látszik, a lufi tovább növekszik egészen addig, amíg a túlnyomás eléri a 20 vízcm-es értéket, azaz a folyadékoszlop már ekkor teljes egészében a jobb oldali csőszár függőleges részébe kerül. Innentől a nyomás nem növekszik tovább, és így a lufi mérete is egy ideig állandó marad, a kompresszor pedig immár gyorsabban emeli a vízoszlopot a csőben (hiszen a lufiba már nem kell levegőt fújni). Amikor a víz elkezd kifolyni a csőből, akkor a nyomás, és így a lufi mérete is csökkenni kezd. Innentől a kompresszorból és a leeresztő lufiból kiáramló levegő is az egyre kisebb tömegű vízoszlopot nyomja ki, amely így egyre gyorsulva „kilövell” a csőből. Amikor minden víz kifolyt a csőből, a lufi visszakérül a teljesen felfújatlan állapotba (a kompresszor pedig ekkortól a szabadba fújja a levegőt).

A lufi maximális méretéhez tartozó λ értéket a $p(\lambda) = 20$ vízcm egyenlet megoldása adja, amelyet iterálással vagy grafikusán (2. ábrán zöld vonal) kaphatunk meg: $\lambda_{\max} \approx 1,145$, azaz a lufi átmérője a folyamat során mindössze 14,5%-kal növekszik meg az eredeti méretéhez képest.

Megjegyzések. 1. A folyamatok időbeliségének kvantitatív vizsgálatához további numerikus adatok szükségesek. A 3. ábrán látható grafikonok a következő feltevésekkel készültek: a lufi kezdeti sugara 2,5 cm, a manométer csövének belső keresztmetszete $0,1 \text{ cm}^2$, az alsó ívének hossza 4 cm, a kompresszor térfogatárama $0,54 \text{ cm}^3$, amivel a feladatban szereplő $\lambda = 1,05$ érték és $s = 5 \text{ cm}$ folyadékszál-elmozdulás épp 20 s alatt történik meg. A grafikonokon a folyadékszál s elmozdulása, a bezárt levegő p túlnyomása és a lufi méretét leíró λ paraméter látható az idő függvényében.

2. Ha a folyadékszál hossza nagyobb lenne, mint a maximális nyomáshoz tartozó 25,65 cm, akkor a nyomás elérné a maximális értéket, majd csökkenni kezdene, de a lufi tovább fújódna, míg $\lambda \approx 3$ értéknél kipukkadna.



3. ábra

2. A súlytalanság állapotában egy R sugarú, $L \gg R$ hosszúságú és $d \ll R$ falvastagságú alumíniumcső a szimmetriatengelyére merőleges, homogén, B indukciójú mágneses mezőben helyezkedik el. A csövet tengelye körül ω_0 szögsebességgel megforgatjuk, majd magára hagyjuk.

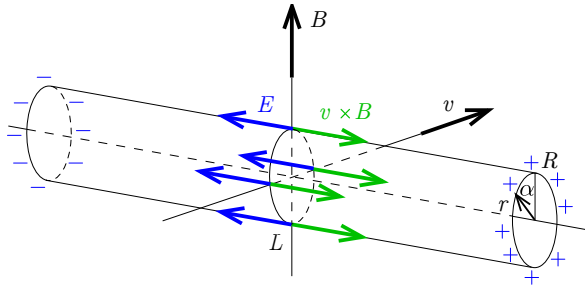
a) Vázoljuk fel a cső kiterített palástjáról készült rajzon a csőben kialakuló áramvonalakat!

b) Írjuk le a cső mozgását az idő függvényében!

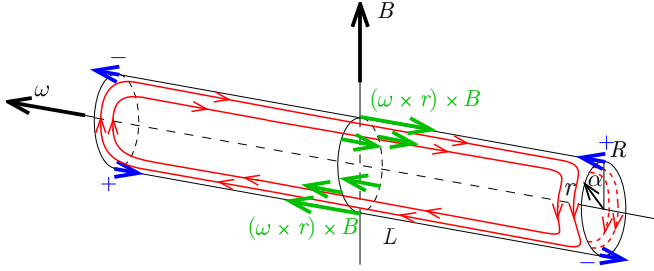
(Vigh Máté)

Megoldás. a) Ha a cső a mágneses térre merőleges irányban mozogna (de nem forogna), akkor a Lorentz-erő a töltéseket szétválasztaná, és az így kialakuló elektrosztatikus tér kiegyenlítené a Lorentz-erőt, egyensúlyi állapot alakulna ki, és áram nem folyna (4. ábra).

Esetünkben viszont a cső palástjának két átellenes része ellenkező irányban mozog, így a Lorentz-erő is ellentétes irányú lesz, aminek következtében a cső végeinél záródhatnak az áramvonalak, és így nem lesz jelentős töltésfelhalmozódás, hanem az 5. ábrán látható módon zárt áramkör jöhet létre.



4. ábra



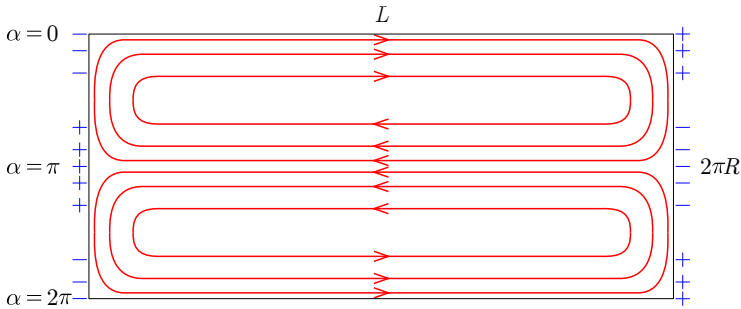
5. ábra

Az $L \gg R$ feltétel miatt a cső végeitől eltekintve az elektrosztatikus tér elhanyagolható, és így a cső falában

$$\mathbf{j} = \sigma(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B},$$

$$j(\alpha) = \sigma\omega BR \cos \alpha$$

áramsűrűség alakul ki, ahol ω a cső pillanatnyi szögsebessége, σ az alumínium fajlagos vezetőképessége (a fajlagos ellenállás reciproka), $0 \leq \alpha < 2\pi$ pedig a tengelytől a palást adott pontjához mutató $\mathbf{r}$ sugár és a mágneses indukció $\mathbf{B}$ vektora által bezárt szög. A cső végein felhalmozódik valamennyi töltés: ezek „térítik el” a cső végén az áramvonalakat. A kialakuló áramvonalakat a 6. ábra mutatja.



6. ábra

b) *I. módszer.* Az $L \gg R$ feltétel miatt a cső végével, mint „széleffektussal” nem foglalkozunk, csak a csőben a cső tengelyével párhuzamosan folyó áramokkal.

Ezekre a mágneses tér erőt fejt ki, egy dV kicsiny térfogatra ható erő:

$$d\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} dV.$$

Az erők és a tengelyre merőleges forgatónyomaték-komponensek vektori eredője a szimmetria miatt nulla, így a cső tömegközéppontja nem mozdul el, és tengelye nem fordul el. Ugyanakkor a tengellyel párhuzamos forgatónyomaték-komponensek eredője nem nulla, a cső forgása így lassulni fog. (Az áramok miatt hő disszipálódik, így a cső energiája biztosan csökkenni fog. Ezt mondja ki a Lenz-törvény is.) A cső kicsiny $dR d\alpha$ keresztmetszetű, L hosszúságú, $dV = L dR d\alpha$ térfogatú keskeny csíkjára ható tengellyel párhuzamos forgatónyomaték-komponens:

$$\begin{aligned} d\mathbf{M} &= \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = \mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) L dR d\alpha, \\ dM &= -R j B \cos \alpha \cdot L dR d\alpha = -\sigma \omega B^2 L dR^3 \cos^2 \alpha d\alpha. \end{aligned}$$

(A negatív előjel azt fejezi ki, hogy a forgatónyomaték-komponens a szögsebességvektorral ellentétes irányú.) Ennek összegzése a teljes csőre

$$M = -\sigma \omega B^2 L dR^3 \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha = -\sigma \omega B^2 L dR^3 \pi.$$

(Ezt az eredményt a szinuszos jel effektív értéke alapján is ismerhetjük: az átlagos érték $\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$, vagy a $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$ átalakítás után szemléletesen is láthatjuk.) A vékony falú cső tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta = mR^2 = 2\pi \varrho L dR^3,$$

ahol ϱ az alumínium sűrűsége. A cső tengely körüli forgását leíró mozgásegyenlet:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{\Theta} = -\frac{\sigma \omega B^2 L dR^3 \pi}{2\pi \varrho L dR^3} = -\frac{\sigma B^2}{2\varrho} \omega.$$

A differenciálegyenlet ugyanolyan alakú, mint a jól ismert radioaktív bomlási törvény, így megoldása:

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

ahol a τ időállandó:

$$\tau = \frac{2\varrho}{\sigma B^2}.$$

A cső tehát exponenciálisan lassulva fog forogni.

Megjegyzés. Az időállandó nem függ a cső méreteitől (mindössze annyit használtunk fel, hogy $d \ll R \ll L$), csak a cső anyagának sűrűségétől és fajlagos vezetőképességétől, valamint a mágneses mező erősségétől. Alumínium esetében 1 mT mágneses indukció esetén az időállandóra két és fél percet kapunk.

II. módszer. A cső egészében időegységenként

$$P = \frac{1}{\sigma} j_{\text{eff}}^2 V$$

energia disszipálódik, ahol (a koszinuszos helyfüggés miatt)

$$j_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} j_{\text{max}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma \omega B R,$$

és $V = 2\pi L d R$ a cső térfogata. Ezt a disszipálódó energiát a cső mozgási energiájának csökkenése fedezi:

$$P = -\frac{dE_m}{dt},$$

ahol

$$E_m = \frac{1}{2} \Theta \omega^2 = \frac{1}{2} \varrho V R^2 \omega^2.$$

Behelyettesítés és a deriválás elvégzése után:

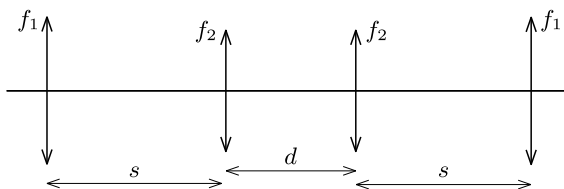
$$\frac{1}{2} \sigma \omega^2 B^2 R^2 V = -\frac{1}{2} \varrho V R^2 \cdot \frac{d(\omega^2)}{dt} = -\frac{1}{2} \varrho V R^2 \cdot 2\omega \frac{d\omega}{dt},$$

egyszerűsítve és rendezve:

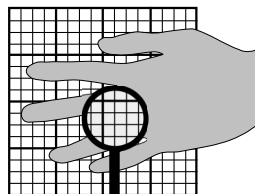
$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\sigma B^2}{2\varrho} \omega,$$

az előző módszer eredményével összhangban.

3. Egy tubusban szimmetrikusan elhelyeztünk két $f_1 = 50$ cm és két $f_2 = 10$ cm fókustávolságú gyűjtőlencsét a 7. ábrán látható módon. Sikerült a lencsákat úgy beállítani, hogy az optikai rendszeren átnézve a tárgyakat éppen olyanak látjuk, mintha egy üres tubuson át néznénk azokat.



7. ábra



8. ábra

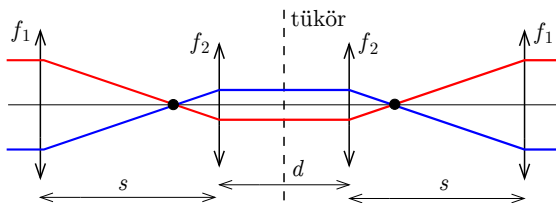
a) Mekkora a lencsék közötti d és s távolságok?

b) Ha az előző optikai rendszert tubus nélkül megépítjük, és a kezünket megfelelő helyen a lencsék közé helyezzük, akkor a 8. ábrán látható módon a kezünk egy részét el tudjuk „tüntetni”. Magyarázzuk meg a jelenséget!

(Széchenyi Gábor)

Megoldás. a) *I. módszer.* A tárgyakat éppen olyannak látjuk, mintha „semmi” nem lenne ott, vagyis egy jobb oldalról érkező fénysugár a lencserendszeren áthaladva éppen a beérkező fénysugár meghosszabbításán fog továbbhaladni. Első lépésként tekintsünk egy olyan fénysugarat, melynek belépő és így kilépő része is párhuzamos az optikai tengellyel. Ekkor – ahogy azt a 9. ábrán is látjuk – a lencserendszer, valamint a sugármenet is tükrörszimmetrikus. Ilyenkor a két belső lencse között haladó fénysugár is párhuzamos az optikai tengellyel. Egy, a végtelenből érkező párhuzamos nyalábot a két jobb oldali lencse párhuzamos nyalábbá képez, azaz ez a két lencse konfokális, fókuszpontjaik egybeesnek:

$$s = f_1 + f_2.$$



9. ábra

Ezután többféle módon megkaphatjuk a d távolság értékét, lássunk erre két különféle utat!

1. *út.* Vegyünk fel egy tetszőleges helyen egy tárgyat, és határozzuk meg sorban egymás után a négy lencse által alkotott képeit. A negyedik lencsén történő leképezés után egy azonos állású és nagyítású, virtuális képet kell kapnunk az eredeti tárgy helyén. A leképezési törvény *szokásos* alakját használva a képletekkel nehezebb a számolás, ezért inkább használjuk a *Newton-féle* alakot (amely az x tárgy és y képtávolságot a fókuszponttól méri, lásd a **G. 855.** gyakorlatot a KöMaL 2024. májusi számában). Eszerint $xy = f^2$.

Helyezzük a tárgyat az első lencse fókuszpontjától x_1 távolságra. A következőkben jelölje x_i (y_i) a jobb oldalról számított i . lencsén történő leképezéshez tartozó, jobb (bal) oldali fókuszponttól mért tárgytávolságot (képtávolságot). A 10. ábrán piros ponttal a képek helyeit, fekete ponttal a fókuszpontokat jelöltük.

Az első lencsén történő leképezés:

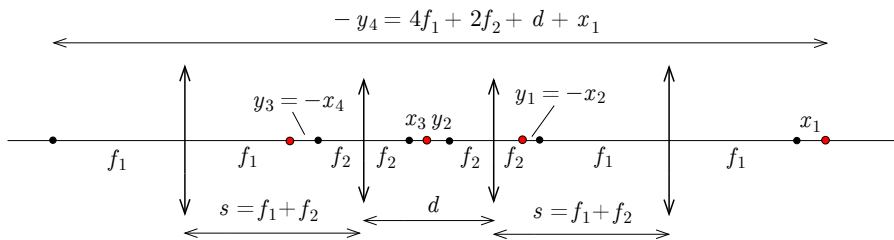
$$x_1 y_1 = f_1^2 \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{f_1^2}{x_1}.$$

Mivel $s = f_1 + f_2$, a két lencse fókusza egybeesik, így

$$x_2 = -y_1,$$

A második lencsén történő leképezés:

$$x_2 y_2 = f_2^2 \quad \Rightarrow \quad y_2 = \frac{f_2^2}{x_2} = -\frac{f_2^2}{f_1^2} x_1.$$



10. ábra

A 10. ábra alapján:

$$x_3 = d - 2f_2 - y_2.$$

Tovább folytatva a harmadik lencsén történő leképezéssel:

$$\begin{aligned} x_3 y_3 = f_2^2 & \Rightarrow y_3 = \frac{f_2^2}{d - 2f_2 - y_2}, \\ x_4 = -y_3. \end{aligned}$$

Végül a negyedik lencsén történő leképezés:

$$\begin{aligned} x_4 y_4 = f_1^2 & \Rightarrow y_4 = \frac{f_1^2}{x_4} = -\frac{f_1^2}{y_3} = -\frac{f_1^2}{f_2^2} (d - 2f_2 - y_2) = \\ & = -\frac{f_1^2}{f_2^2} \left(d - 2f_2 + \frac{f_2^2}{f_1^2} x_1 \right) = -\frac{f_1^2}{f_2^2} (d - 2f_2) - x_1. \end{aligned}$$

Ismét a 10. ábra alapján, ahhoz hogy a negyedik kép az első tárgy helyén legyen a következő geometriai feltételnek kell teljesülnie:

$$-y_4 = 4f_1 + 2f_2 + d + x_1.$$

Ebből

$$\frac{f_1^2}{f_2^2} (d - 2f_2) + x_1 = 4f_1 + 2f_2 + d + x_1.$$

Látható, hogy az egyenletből kiesik az x_1 változó, azaz tetszőleges helyre helyezve a tárgyat, annak képe a négy lencsén történő leképezés után éppen a tárgy helyén lesz. Az egyenletet tovább alakítva:

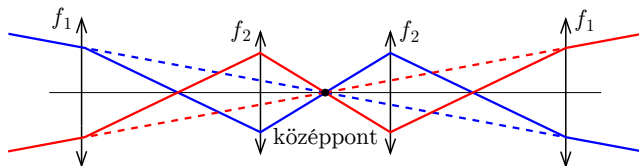
$$\begin{aligned} \left(\frac{f_1^2}{f_2^2} - 1 \right) d &= 2f_2 \frac{f_1^2}{f_2^2} + 4f_1 + 2f_2, \\ (f_1^2 - f_2^2) d &= 2f_2 (f_1^2 + 2f_1 f_2 + f_2^2). \end{aligned}$$

A két középső lencse közötti távolságra az alábbi kifejezés adódik:

$$d = 2f_2 \frac{(f_1 + f_2)^2}{f_1^2 - f_2^2} = 2f_2 \frac{f_1 + f_2}{f_1 - f_2}.$$

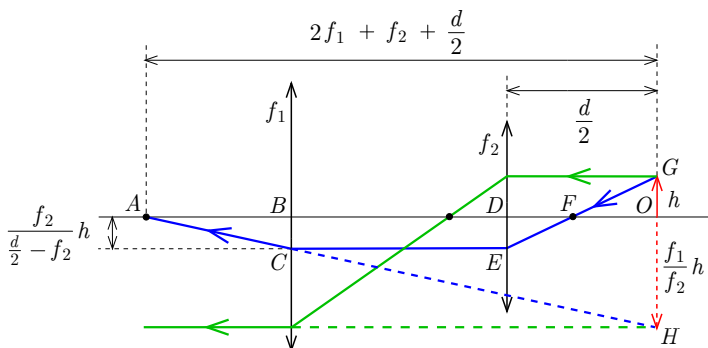
2. út. A lencserendszer középpontosan is szimmetrikus. Ha a beérkező fénysugár meghosszabbítása a középponton menne át, akkor a kimenő fénysugár meghosszabbítása is átmegy a középponton. Ilyenkor a fénysugárnak is középpontosan

szimmetrikusnak kell lennie, azaz annak fizikailag is át kell haladnia a rendszer középpontján (lásd a 11. ábrát). Ennek következményeként egy, a középpontban elhelyezett tárgyat a két bal oldali lencse a középpontba képez le mint virtuális képet.



11. ábra

Szerkesszük meg a középpontba helyezett h magasságú tárgy képét! Tekintsünk egy, az optikai tengellyel párhuzamos, illetve egy, az f_2 fókusz távolságú lencse fókuszán áthaladó sugármenetet, ezeket zölddel, illetve kékkel rajzoltuk meg a 12. ábrán.



12. ábra

A két lencse konfokális, így a zöld sugármenetet követve a kép méretére

$$OH = \frac{f_1}{f_2} h$$

adódik. Az FGO és FED háromszögek hasonlóak, valamint

$$DF = f_2 \quad \text{és} \quad FO = \frac{d}{2} - f_2,$$

ahonnan

$$DE = BC = \frac{f_2}{\frac{d}{2} - f_2} h.$$

Az ABC és AOH háromszögek is hasonlóak, amiből következik, hogy

$$\frac{BC}{AB} = \frac{OH}{AO} \Rightarrow \frac{\frac{f_2}{\frac{d}{2} - f_2} h}{f_1} = \frac{\frac{f_1}{f_2} h}{2f_1 + f_2 + \frac{d}{2}}.$$

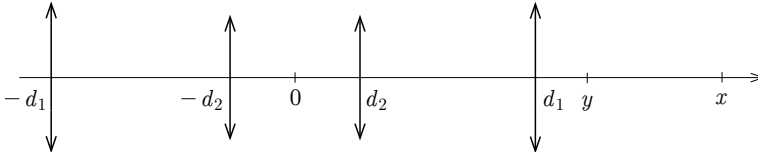
Az egyenletet d -re megoldva a korábban megkapott végeredményre jutunk.

A megadott fókusz távolságok behelyettesítése után:

$$s = f_1 + f_2 = 60 \text{ cm} \quad \text{és} \quad d = 2f_2 \frac{f_1 + f_2}{f_1 - f_2} = 30 \text{ cm}.$$

II. módszer. Vegyük fel a koordinátatengelyt az optikai tengelyen, középpontját helyezzük az elrendezés közepére! A tárgy legyen a tengely x pontjában, amit a jobb szélső lencse a z pontba képez le, ezt az első képet pedig a második lencse az y pontba. A lencsék helyére is bevezetünk két új paramétert: az origótól mért távolságukat (hogy rövidebbek legyenek a képletek, 13. ábra):

$$d_2 = \frac{1}{2}d, \quad d_1 = \frac{1}{2}d + s.$$



13. ábra

A harmadik és negyedik lencse az első kettőnek a tükörképe, ezért számukra az x és y pont a $-x$, $-y$ párnak felel meg. A fényút megfordíthatóságát is kihasználva arra jutunk, hogy a bal oldali két lencse a második képet akkor képezi pontosan vissza az x pontba, ha az $y = L(x)$ páratlan függvény.

Írjuk fel az első két lencsére a leképezési törvényt a $(k - f)(t - f) = f^2$ Newton-féle alakot használva:

$$\begin{aligned} (x - d_1 - f_1)(d_1 - z - f_1) &= f_1^2, \\ (z - d_2 - f_2)(d_2 - y - f_2) &= f_2^2. \end{aligned}$$

Ejtsük ki a z ismeretlent úgy, hogy mindkét egyenletet elosztjuk a bal oldal z -t nem tartalmazó tényezőjével, majd összeadjuk ezeket:

$$d_1 - d_2 - f_1 - f_2 = \frac{f_1^2}{x - d_1 - f_1} + \frac{f_2^2}{d_2 - y - f_2}.$$

A nevezőkkel beszorozva:

$$(d_1 - d_2 - f_1 - f_2)(x - d_1 - f_1)(d_2 - y - f_2) = f_1^2(d_2 - y - f_2) + f_2^2(x - d_1 - f_1).$$

Mielőtt elvégeznénk az összes szorzást, nézzük meg, melyik tagokra van szükségünk. A fenti egyenlet egy

$$Axy + Bx + Cy + D = 0$$

implicit alakra vezet, ahol

$$(1) \quad A = d_1 - d_2 - f_1 - f_2,$$

$$(2) \quad B = f_2^2 + A(f_2 - d_2),$$

$$(3) \quad C = -f_1^2 - A(d_1 + f_1),$$

$$(4) \quad D = f_1^2(d_2 - f_2) - f_2^2(d_1 + f_1) + A(d_1 + f_1)(d_2 - f_2) = \frac{BC + f_1^2 f_2^2}{A}.$$

A keresett L függvény:

$$y = -\frac{Bx + D}{Ax + C}.$$

Ez akkor páratlan, ha $\alpha)$ $A = D = 0$, vagy $\beta)$ $B = C = 0$.

Az $\alpha)$ esetben az (1) egyenletből $A = 0$ feltétellel:

$$(5) \quad s = d_1 - d_2 = f_1 + f_2.$$

Ez a távolság ugyanakkora, mint a Kepler-féle távcsőben, vagyis eszközünk nem más, mint két kifelé fordított Kepler-távcső. A d középső távolság meghatározásához nézzük a D együtthatóra vonatkozó egyenletet. A (4) egyenletből $D = 0$ feltétellel:

$$(6) \quad f_1^2(d_2 - f_2) - f_2^2(d_1 + f_1) = 0.$$

Helyettesítsük be (5)-ből $d_1 = d_2 + f_1 + f_2$ -t, és oldjuk meg d_2 -re:

$$\begin{aligned} f_1^2(d_2 - f_2) - f_2^2(d_2 + 2f_1 + f_2) &= 0 \\ d_2 = f_2 \frac{f_1^2 + 2f_1 f_2 + f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} = f_2 \frac{f_1 + f_2}{f_1 - f_2} &\Rightarrow \quad d = 2f_2 \frac{f_1 + f_2}{f_1 - f_2}. \end{aligned}$$

Az eredményen látszik, hogy a megoldhatósághoz teljesülnie kell az $f_1 > f_2$ egyenlőtlenségnek. A második kép helye végül:

$$(7) \quad y = -\frac{B}{C}x = \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 x.$$

A $\beta)$ megoldásról megmutatjuk, hogy fordított képet ad, ezért nem felel meg a feladat leírásának. A kép annyiszor fordul meg az eszközben, ahány valódi, ernyőn felfogható kép létrejön. Az $\alpha)$ megoldásban például a párhuzamos fénynyaláb (végtelen távoli tárgy) a középső tartományban szintén párhuzamos, a két szélsőben a lencsék közös fókuszpontjában valódi kép jön létre, így a kétszer megfordított kép egyenes állású lesz. A $\beta)$ megoldásnál a második kép az

$$y = -\frac{D}{Ax}$$

helyre kerül, a végtelen távol levő tárgy második képe tehát az origóban lesz. Mivel a sugármenet szimmetrikus, ez mindenképpen páratlan számú képfordítást jelent, a végső kép így fordított állású lesz.

A feladat $a)$ kérdésére tehát a válasz (a korábbi eredményekkel összhangban):

$$s = f_1 + f_2 = 60 \text{ cm} \quad \text{és} \quad d = 2f_2 \frac{f_1 + f_2}{f_1 - f_2} = 30 \text{ cm}.$$

Megjegyzések. 1. A kép és a tárgy összetett optikai eszközöknél is felcserélhető – ez a fénysugár megfordíthatóságából következik. Ha a kettő ugyanott van, akkor a felcserélhetőség az eszköz nagyítására az

$$N^* = \frac{K}{T} = \frac{T}{K} = \frac{1}{N^*}$$

feltételt adja, amiből

$$N^{*2} = 1 \quad \text{és} \quad N^* = \pm 1,$$

vagyis a kép ugyanakkora, de lehet egyenes vagy fordított állású.

Ellenőrizzük, hogy a nagyítás az α) megoldásban minden tárgytávolságra $+1$. Egy lencse nagyítása (amit fordított állású kép esetén negatívnak tekintünk):

$$N = \frac{K}{T} = -\frac{k}{t} = \frac{f}{f-t} = \frac{f-k}{f}.$$

A teljes nagyítás a négy lencse nagyításának szorzata. Az első és harmadik kép helyét nem számoltuk ki, de az egyes lencsék nagyításának felírásánál szerencsére két-két lehetőségünk van:

$$N^* = \frac{f_1}{f_1 + d_1 - x} \cdot \frac{f_2 - d_2 + y}{f_2} \cdot \frac{f_2}{f_2 - d_2 - y} \cdot \frac{f_1 + d_1 + x}{f_1}.$$

A szorzások elvégzésekor vegyük észre, hogy a számláló és a nevező egyforma tagokat tartalmaz, csak némelyiket eltérő előjellel:

$$(8) \quad N^* = \frac{[(f_1 + d_1)(f_2 - d_2) + xy] + [x(f_2 - d_2) + y(f_1 + d_1)]}{[(f_1 + d_1)(f_2 - d_2) + xy] - [x(f_2 - d_2) + y(f_1 + d_1)]}.$$

A számláló és nevező eltérő előjelű részéről megmutatjuk, hogy zérus:

$$x(f_2 - d_2) + y(f_1 + d_1) = \frac{x}{f_1^2} [f_1^2(f_2 - d_2) + f_2^2(f_1 + d_1)] = 0.$$

(Ehhez használtuk a (7) eredményt, a szögletes zárójelben levő rész pedig (6) alapján zérus.) Tehát $N^* = 1$, bárhol is van a tárgy.

2. A β) megoldás a következő:

$$s = \sqrt{2f_1f_2}, \quad d = 2f_2 \frac{f_1 - \sqrt{2f_1f_2}}{f_1 + f_2 - \sqrt{2f_1f_2}}, \quad f_1 > 2f_2.$$

A nagyítás (8) kifejezésében most az azonos előjelű rész, a számláló és nevező első tagja tűnik el:

$$(f_1 + d_1)(f_2 - d_2) - \frac{D}{A} = (f_1 + d_1)(f_2 - d_2) - \frac{f_1^2 f_2^2}{A^2} = 0,$$

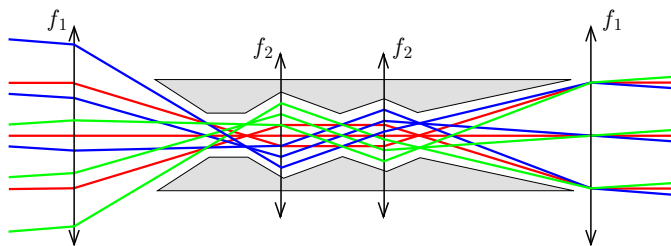
ahol előbb behelyettesítettük (4) egyenletből D -t, majd pedig az

$$\frac{f_1^2}{A} = -(d_1 + f_1), \quad \frac{f_2^2}{A} = d_2 - f_2$$

értékeket, amik a $B = C = 0$ feltétellel a (2) és (3) egyenletből adódnak. A nagyítás tehát ebben az esetben $N^* = -1$, bárhol van a tárgy.

b) Ha megnézzük a 9. ábrán a párhuzamos nyalábot, láthatjuk, hogy a két belső lencse között $\frac{f_2}{f_1}$ arányban, esetünkben $\frac{1}{5}$ -öd részére szűkül össze. Ha a kezünket úgy rakjuk be a két belső lencse közé, hogy ez a szűk nyaláb a széttartott ujjaink

között át tud menni, akkor nem fog kitakarni semmit, és a teljes lencserendszeren át a hátteret látjuk. A 14. ábrán nemcsak a párhuzamos, hanem kis szögben érkező nyalábokat is tekintettünk, és szürkével rajzoltuk be azokat a tartományokat, ahová helyezett tárgyak nem fognak semmit kitakarni.



14. ábra



Az ünnepélyes eredményhirdetésre és díjkiosztásra 2024. november 22-én délután került sor az ELTE TTK Eötvös termében. Megemlékeztünk az 50 és 25 évvel ezelőtti Eötvös-versenyről, ismertettük az akkori feladatokat és a győztesek nevét. Az 50 évvel ezelőtti díjazottak közül *Vladár Károly* – aki az idei évtől a versenybizottság tagja – volt jelen, a 25 évvel ezelőttiek közül *Hegedűs Ákos*, *Gáspár Merse Előd* és *Terpai Tamás* – ők pár mondatban beszéltek a versennyel kapcsolatos emlékeikről és a pályafutásukról. A 75 évvel ezelőtti győztes *Holics László* és az 50 évvel ezelőtti II. díjas *Szép Jenő* néhány soros üdvözlötet küldött. Ezután következett a 2024. évi verseny feladatainak és megoldásainak bemutatása. Az 1. feladat megoldását *Vigh Máté*, a 2. feladatét *Vankó Péter*, a 3. feladatét *Széchenyi Gábor* ismertette.

Az esemény végén került sor az eredményhirdetésre. A díjakat *Ormos Pál*, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat elnöke adta át.

I. díjat a versenybizottság nem adott ki.

Az első feladat helyes, a második feladat lényegében helyes megoldásáért és a harmadik feladatban elért részeredményért *második díjat* nyert **Bencz Benedek**, a Baár–Madas Református Gimnázium, Általános Iskola és Kollégium 12. osztályos tanulója, *Horváth Norbert* tanítványa.

A második feladat helyes megoldásáért és a másik két feladatban elért részeredményekért *harmadik díjat* nyert **Téti Miklós**, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója, *Schramek Anikó* tanítványa.

Egy feladat lényegében helyes megoldásáért és kisebb részeredményekért *dicséretet* kapott **Iliás Gergely**, az ELTE fizika BSc szakos hallgatója, aki a Jedlik Ányos Gimnáziumban érettségizett *Radnai Tamás* tanítványaként, **Masa Barnabás**, a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Csányi Sándor* tanítványa, valamint **Tóth Kolos Barnabás**, a Budapest V. Kerületi Eötvös József Gimnázium 11. osztályos tanulója, *Varga Balázs* tanítványa.

A második díjjal az *Andersen Adótanácsadó Zrt.* és a *Nanorobot Vagyongkezelő Kft.* adományából 90 ezer forint, a harmadik díjjal 60 ezer, a dicsérettel 40 ezer